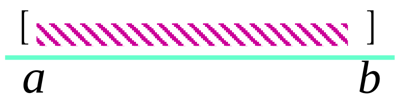
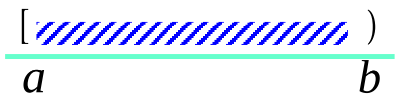
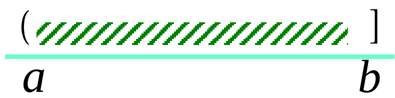
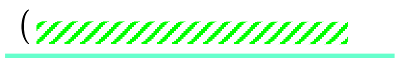
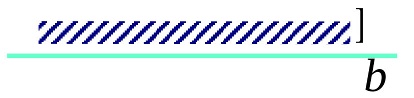
DESIGUALDADES E INTERVALOS

1. **INTERVALOS:** Son regiones comprendidas entre dos números reales. En general, si los extremos pertenecen al intervalo, se dice que <u>cerrado,</u> si por el contrario no pertenecen al intervalo, se dice que es abierto. Si uno de extremos pertenece al conjunto y el otro no, se dice que semiabierto o semicerrado.

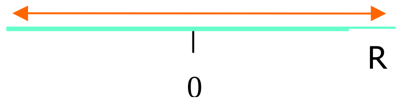
CLASES DE INTERVALOS

COMO CONJUNTO	TIPO DE INTERVALO	REPRESENTACION GEOMETRICA
$\{x / a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$ CERRADO	
] $\{x / a \leq x \leq b\}$	$[a,b)$ SEMICERRADO ALA IZQUIERDA	
$\{x / a \langle x \leq b\}$	$(a,b]$ SEMICERRADO A LA DERECHA	
$\{x / a \leq x \leq b\}$	(a,b) ABIERTO	
$\{x / x \rangle a\}$	(a, α)	
$\{x / x \geq a\}$	$[a, \alpha)$	
$\{x / x \langle b\}$	$(-\alpha, b)$	

$\{x / x \leq b\}$ $(\alpha, b]$



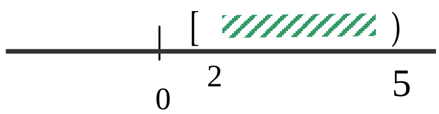
$\{x / x \in \Re\}$ $(-\alpha, \alpha)$



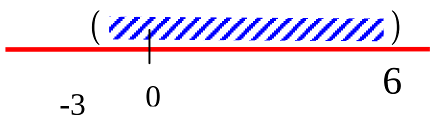
Ejemplos

Dibujar los siguientes intervalos

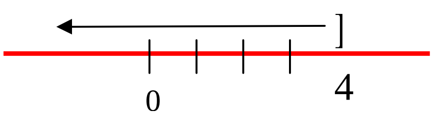
1. $[2,5)$



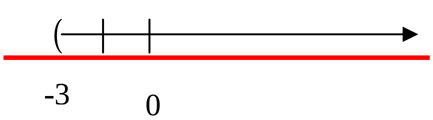
2. $(-3, 6)$



3. $\{x \leq 4\}$



4. $\{x \rangle -3\}$



5. $\left[-1, 6\right]$

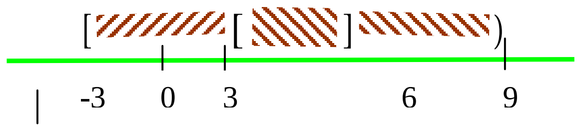
OPERACIONES BÁSICAS ENTRE INTERVALOS

Los intervalos se operan análogamente como los conjuntos. Mediante ejemplos analizaremos, estas operaciones como unión, intersección, diferencia y complemento.

Sean A: $\left[-3,6\right]$ B: $\left[3,9\right)$ C: $\left(-5,4\right)$

Calcular

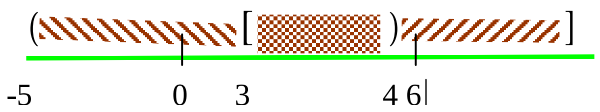
1) $A \cap B$



La intersección corresponde a la región común a los intervalos, es decir,

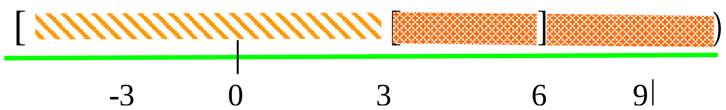
$$A \cap B \; = \; [3{,}6]$$

2) $B \cup C$



La unión corresponde a las regiones comprendidas por los dos conjuntos (reunión), es decir BUC= $(-5{,}6]$.

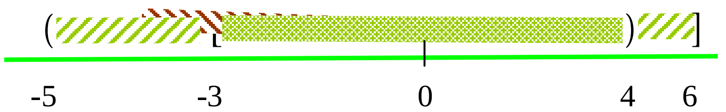
1) A - B



La diferencia corresponde a la región que corresponde al intervalo A que no pertenezca a B, es decir,

$$A - B = [-3{,}3)$$

4) C-A B



La diferencia corresponde, a la región que pertenece A C y no pertenece a A, es decir

$$C - A = (-5 - 3)$$

5) B' Solución como $B = [3{,}9)$

El conjunto de un intervalo, es lo que le falta al intervalo para llegar a los reales.

En nuestro caso.

$$B = (-\alpha, 3) \cup (9, \alpha)$$

Obsérvese, cuando se busca el complemento, se debe tener en cuenta que los extremos no sean infinitos, cambian su condición, es decir se está cerrando se abre y viceversa.

6) C' El complemento, teniendo las observaciones del problema atender, es:

Solución: Como $C = (-5-4)$

$$C' = (-\alpha, -5] \cup [4, \alpha)$$

DESIGUALDADES

1. INTRODUCCION

ORDEN DE LA RECTA NUMERICA

Decir que $a\langle b,$ significa que a está a la izquierda de b, en la recta numérica

________________a_______________________b_________________R

Si $a \langle b \Leftrightarrow b - a \rangle 0,$ es decir, que el conjunto de los números reales es un conjunto ordenado.

PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES

Si $a, b \ y \ c$ son números reales

1. **TRICOTOMIA**

Si a y b son número reales, se cumple una y solo una de las siguientes propiedades:

$$a \langle b \qquad o \qquad a = b \qquad o \qquad a \rangle b$$

2. **TRANSITIVA**

Si $a \rangle b, \ \ y \ \ b \rangle c \ \Rightarrow \ a \rangle c$

Ejemplo

$$12 \rangle 8 \, , y \, , \quad 8 \rangle 5 \quad \Rightarrow \quad 12 \rangle 5$$

3. **ADITIVA**

Si $a \rangle b \ \Rightarrow \ a + c \rangle b + c$

Ejemplo

Si $9 \rangle 2$, entonces, $9 + 5 \ \rangle \ 2 + 5 \quad \Rightarrow \quad 14 \rangle 7$

4. **MULTIPLICATIVA**

a) Si $c \rangle o,$ se cumple que

Si $a \rangle b \Rightarrow a.c \rangle b.c$

Ejemplo: Sea $8 \rangle -2 \ y \ c = 4 \Rightarrow 8.4 \rangle -2.4$

$$\Rightarrow 32 \ \rangle -8$$

b) Si $a \rangle b \ \Rightarrow \ a.c \ \langle \ b.c$

Ejemplo: Si $-3 \ \rangle \ -7 \ \Rightarrow (-3)(-5) \ \langle \ (-7)(-5)$

$$\Rightarrow 15 \ \langle \ 35$$

5. Si $a \rangle b \ \ y \ \ c \rangle d \ \Rightarrow \ a + c \ \rangle \ b + d$

   Ejemplo: Si $8 \rangle 5 \ \ y \ \ 7 \rangle 4 \ \Rightarrow 8 + 7 \ \rangle \ 5 + 1 \ \Rightarrow \ 15 \rangle 9$

6. Si $a \rangle 0 \Rightarrow -a \langle 0$

   Ejemplo: $si \ \ 8 \rangle 0 \ \Rightarrow \ -8 \langle 0$

7. $Si \ \ a \neq 0, \ \ a^2 \rangle 0$

   Ejemplos

   $Si \ \ 8 \rangle 0 \ \Rightarrow \ 8^2 = 64 \rangle 0$

   $Si - 7 \langle 0 \Rightarrow (-7)^2 = 49 \rangle 0$

8. $Si\ a \rangle 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \rangle\ 0$

Ejemplo

$$Si\ 7 \rangle\ 0 \Rightarrow \frac{1}{7} \rangle\ 0$$

9. $Si\ a \rangle b\ \ y\ \ c \rangle 0,\ \ entonces,\ \frac{a}{c}\ \rangle\ \frac{b}{c}$

Ejemplo

$$Si\ \ 10 \rangle 5\ \Rightarrow\ \frac{10}{5} \rangle \frac{5}{5}\ \Rightarrow\ 2 \rangle 1$$

10. $Si\ \ a \rangle b\ \ y\ \ c \langle o\ \Rightarrow\ \frac{a}{c} \langle \frac{b}{c}$

Ejemplo:

$$Si\ \ 24\ \rangle\ 16 \Rightarrow \frac{24}{-8}\ \langle\ \frac{16}{8}\ \Rightarrow -3 \langle -2$$

LAS PROPIEDADES SE CUMPLEN CUANDO SE TIENEN LA RELACIÓN DE $\langle\ \ O\ \ \rangle$

SOLUCION DE DESIGUALDADES

Resolver una desigualdad es un proceso que consisten en transformar las desigualdades hasta que el conjunto solución sea evidente. Las herramientas utilizadas son las propiedades de orden ya reseñadas. Es decir, que debemos realizar ciertas operaciones en una desigualdad sin cambiar el conjunto solución, en lo referente:

1. Se puede adicionar o aumentar el mismo número miembros de la desigualdad.

2. Se pueden multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, sin que la desigualdad cambie de sentido.

3. se pueden multiplicar ambos miembros por un número negativo, pero se debe de cambiar el sentido de la desigualdad.

RESOLUCION DE DESIGUALDADES

1) LINEALES

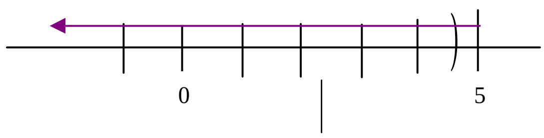
En cada uno de los siguientes ejemplos resolver la desigualdad y dibujar la gráfica del conjunto solución.

1. $4x - 7 \langle 3x + 5$

Solución: $4x - 7 \langle 3x + 5$

$x \langle 5 \, (sume - 3x)$

$s = (-\propto, 5)$

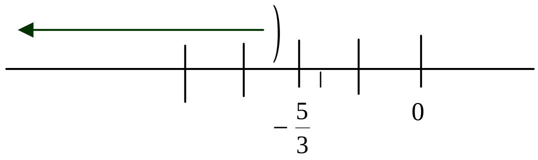


2. $7x-1\leq 10x+4$

Solución: $7x-1\leq 10x+4$

$7x\leq 10x+5\ \ (Sume 1)$

$-3x\leq 5\ \ (Sume-10x)$



$x\leq -\frac{5}{3}\,(Dividi\ \ por-3)$ $\qquad s=\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$

3. $2\,(2x+3)-10\,\langle 6\,(x-2)$

Solución

$2\,(2x+3)-10\,\langle\,(6x-2)$

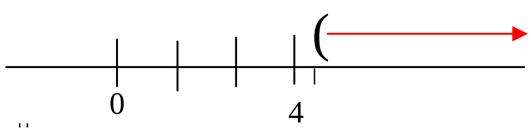
$4x+6-10\,\langle\,6x-12$

$4x-4\ \langle\ 6x-12$ (Simplificando)

$4x\ \langle\ 6x-8$ $\qquad (sume-4)$

$-2x\ \langle\ -8$ $\qquad (Sume-6x)$

$x\ \rangle\ 4$ $\qquad (dividí\ \ \ por-2)$



$$s = (4, \propto)$$

4. $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \rangle \frac{1}{2}\ (3-x)$

Solución

$$\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \ \rangle\ \frac{1}{2}\ (3-x) + \frac{x}{6}$$

$$\frac{2}{3}x\ \ +14 - \ \frac{x}{4}\ \rangle\ \frac{3}{2} - \ \frac{1}{2}\ \ + \ \frac{x}{6}$$

$$\frac{8x+168-3x}{12}\ \rangle\ \frac{18-6x+2x}{12}$$

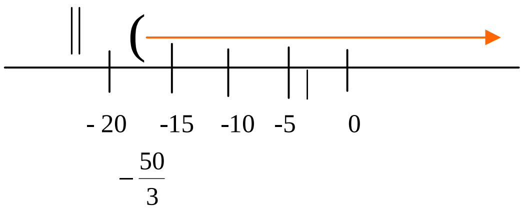
$$5x+168-4x \rangle 18-4x \qquad \textit{simplificando}$$

$$5x \rangle -150-4x \qquad (sume -168)$$

$$9x \rangle -150 \qquad (sume 4x\ \ )$$

$$x\ \rangle \frac{-150}{9} \qquad (dividi\ \ por\ \ 9)$$

$$x \rangle \frac{-50}{3}$$

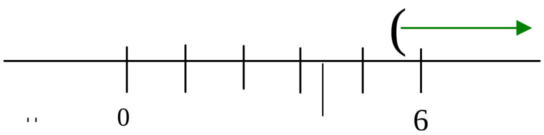


$$S = \left(-\frac{50}{3}, \propto\right)$$

5. $\frac{x}{-3} \leq -2$

Solución $\frac{x}{-3} \leq -2$

$$x \geq 6 \qquad (multiplique\ por\ -3)$$



$$s = (6, \propto)$$

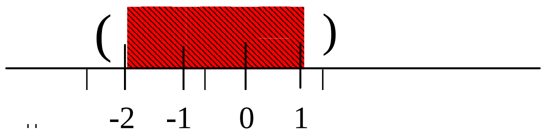
6. $-3 \leq 4 - 7x \langle 18$

Solución: $-3 \leq 4 - 7\ x \langle\ 18$

$$-7 \leq -7x \langle 14 \qquad (Sume - 4)$$

$$1 \geq x \rangle -2 \qquad (dividí\ \ por - 7)$$

$$-2 \ \langle \ \ x \ \le \ 1$$



$$s = (-2{,}1)$$

7. $-6 \le -\frac{2}{5}(1-x) \ \le \ 4$u

Solución
$$-6 \le -\frac{2}{5}(1-x) \ \le \ 4$$

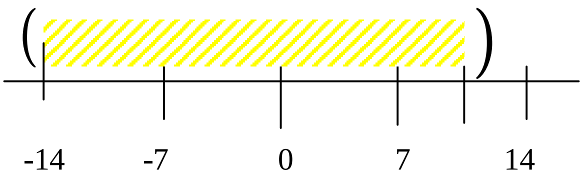
$$-6 \ \le \ \frac{-2}{5} \ + \frac{2}{5}x \le \ 4$$

$$-6 \le \frac{-2+2x}{5} \le 4$$

$$-30 \le -2+2x \le 20 \qquad (\textit{simplificando})$$

$$-28 \ \le \ 2x \ \le \ 22 \qquad (\textit{sume})$$

$$-14 \ \le \ x \ \ \le \ \ 11 \ \ (\textit{dividí} \ \ \ \textit{por} \ \ 2)$$



$$S:[-14{,}11]$$

2)NO LINEALES:

2.1. DESIGUALDAD POLINOMICA

Para resolver desigualdades cuadráticas o cuando dos se debe reunir todos los términos diferentes a cero en un solo miembro, si se pueden factorizar sus términos en factores de primero grado y se aplican el método gráfico, que explicamos enseguida.

2.2. METODO GRAFICO

En el proceso de resolver una desigualdad cuadrática se puede presentar una desigualdad de las formas

$$a\,(x-\gamma_1)(x-\gamma_2) \rangle\ 0$$

$$a\,(x-\gamma_1)(x-\gamma_2) \langle\ 0$$

Estas desigualdades se pueden resolver con facilidad utilizando el método gráfico, conocido como el método de "cruces y cementerios". Este método es indispensable cuando se van a resolver desigualdades con grado $n \rangle 2$, es decir, desigualdades de la forma

$$a(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)\cdots(x-\gamma_n) \;\; \begin{matrix} \rangle 0 \\ \langle 0 \end{matrix}$$

ALGORITMO:

1. Se factoriza el polinomio

2. Se traza una recta por cada factor y una recta adicional para el resultado.

3. Se calculan las raíces contenidas en cada factor y se ubican en las rectas

4. Se trazan líneas verticales por cada raíz

5. a la izquierda de cada raíz ubicada en cada recta, se señala con signos menos y a la derecha con signos más.

6. se aplica la ley de los signos, en cada una de las regiones determinadas por las líneas verticales y el resultado se escribe en el lugar que corresponde en la recta final.

EJEMPLOS:

1. $x^2 - 12 \langle\, x$

Solución

$$x^2 - 12 \langle\, x$$

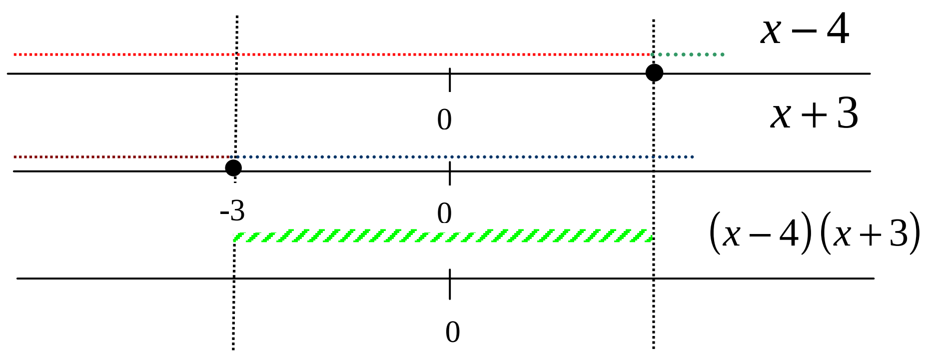
$$x^2 - x - 12 \langle\, 0$$

$$(x-4)(x+3) \langle\, 0$$

Puntos críticos

$x-4=0 \quad ,o, \quad x+3=0$

$x=4 \quad ,o, \quad x=-3$



$$s:(-3,4)$$

2. $x^2+21 \geq 10x$

Solución

$x^2+21 \;\geq\; 10\,x$

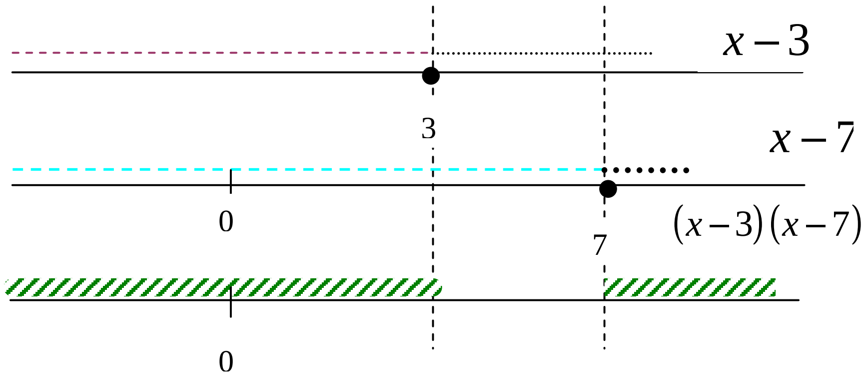
$x^2-10x+21 \geq 0$

$(x-3)(x-7) \geq 0$

Ahora, los puntos críticos

$x-3=0 \quad$ o $\quad x-7=0$

$x = 3$ o $x = 7$



$$s = (-\propto, 3) \cup (7, \propto)$$

3. $(x-2)(x+1)(x+3) \leq 0$

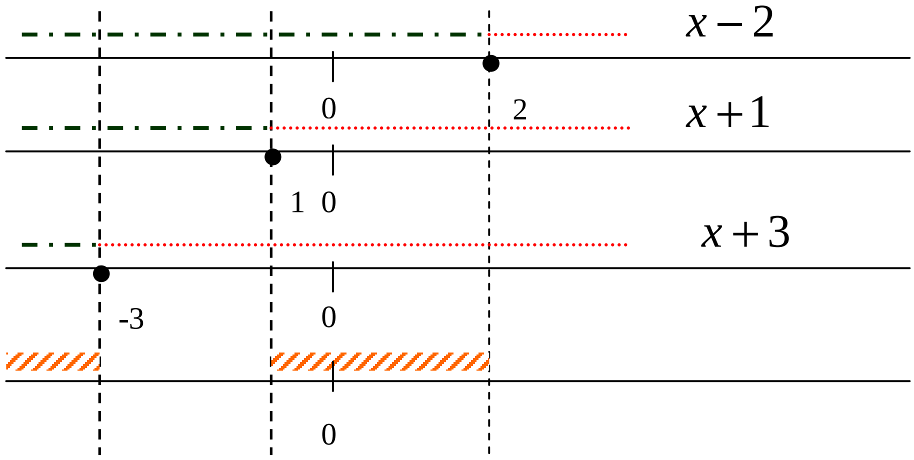
Solución

$$(x-2)(x+1)(x+3) \leq 0$$

Determinemos los puntos críticos

$x - 2 = 0$,o, $x + 1 = 0$,o, $x + 3 = 0$

$x = 2$,o, $x = -1$,o, $x = -3$



$$s=(-\infty,-3)\cup(-1,2)$$

4. $x^3+4x^2\geq 4x+16$

Solución

$$x^3+4x^2\geq 4x+16$$

$$x^3+4x^2-4x-16\geq 0$$

Para factorizar esta expresión de orden n=3, utilizaremos la división sintética (regla de Ruffini).

$$D(16)\pm 1\pm 2\pm 4\pm 8\pm 16$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 4 & -4 & -16 & \underline{-2} \\ & 2 & 12 & -16 & \\ \hline 1 & 6 & 8 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, la expresión inicial queda factorizada de la siguiente manera

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \geq 0$$

$$(x-2)\left(x^2 + 6x + 8\right) \geq 0$$

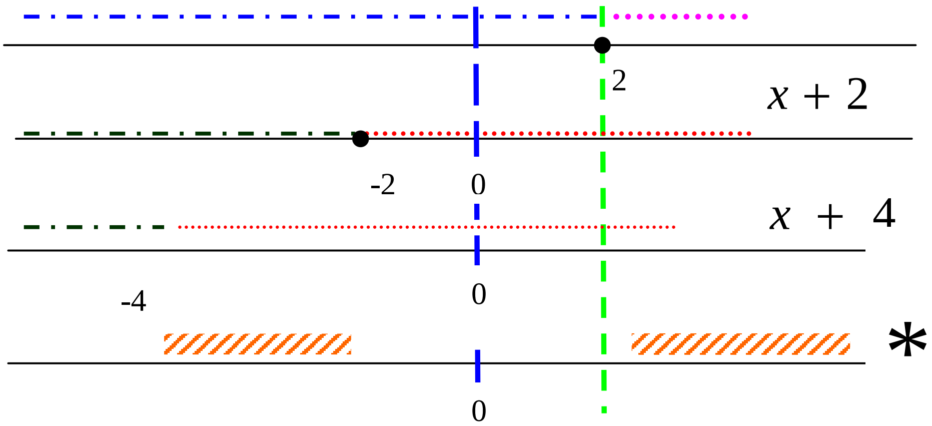
$$(x-2)\ (x+2)\ (x+4) \geq 0$$

Ahora, apliquemos el método gráfico, determinando primero, los puntos críticos

$x - 2 = 0$,o, $x + 2 = 0$,o, $x + 4 = 0$

$x = 2$,o, $x = -2$,o, $x = -4$

$x - 2$



$$S = [-4,-2] \cup [2,\alpha]$$

5. $x^3 + 5 \leq 5x^2 + x$

Solución

$$x^3 + 5 \leq 5x^2 + x$$

$$x^3 + 5x^2 - x + 5 \leq 0$$

Apliquemos la regla de Ruffini, para factorizar el polinomio anterior.

				- 1
1	-5	-1	5	
	-1	+6	-1	
1	-6	5	$\boxed{0}$	

El polígono inicial queda factorizado de la siguiente manera

$$x^3 - 5x^2 - x + 5 \leq 0$$

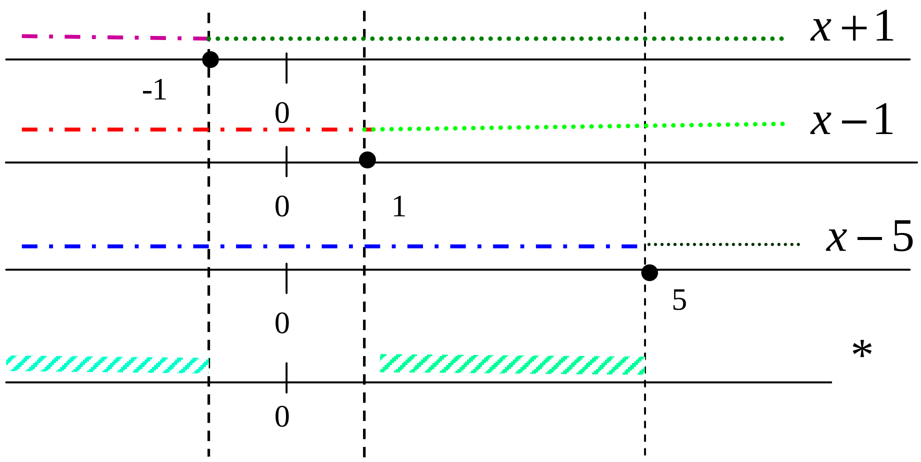
$$(x+1)\left(x^2 - 6x + 5\right) \leq 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-5) \leq 0$$

Determinar los puntos críticos

$x + 1 = 0$,o, $x - 1 = 0$,o, $x - 5 = 0$

$\boxed{x = -1}$,o, $\boxed{x = 1}$,o, $\boxed{x = 5}$



$$s = (-\propto, -1) \cup (1,5)$$

6. $x^2 \rangle 9$

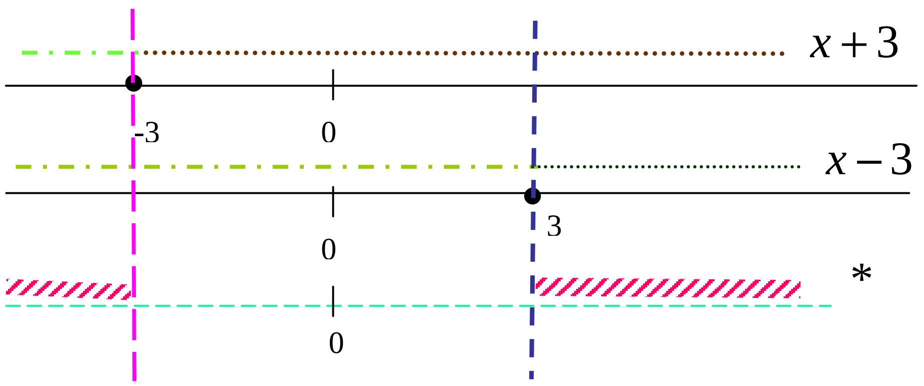
Solución: $x^{2}\ \rangle\ 9$

$$x^{2}-9\geq 0$$

$$(x+3)(x-3)\geq 0$$

Puntos críticos: $x+3=0 \quad ,o, \quad x-3=0$

$$x=-3 \quad ,o, \quad x=3$$



$$s=(-\propto,-3)\cup(3,\propto)$$

7. $x^{2}+5x\leq 0$

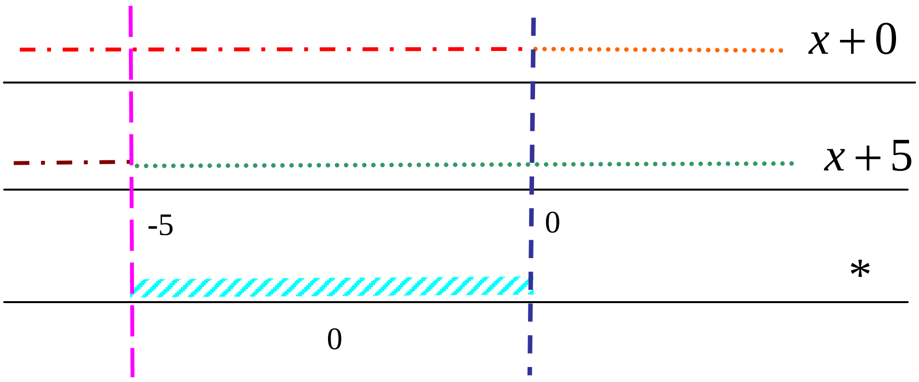
Solución

$$x^2 + 5x \leq 0$$

$$x(x+5) \leq 0$$

Puntos críticos: $x = 0 \qquad ,o, \qquad x + 5 = 0$

$$x = 0 \qquad ,o, \qquad x = -5$$



$$s = (-5,0)$$

8. $x^2 + 2x - 5 \geq 0$

Solución: Como la expresión no es factorizable con números enteros, debemos aplicar la ecuación general de segundo grado, así:

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-5)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+20}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

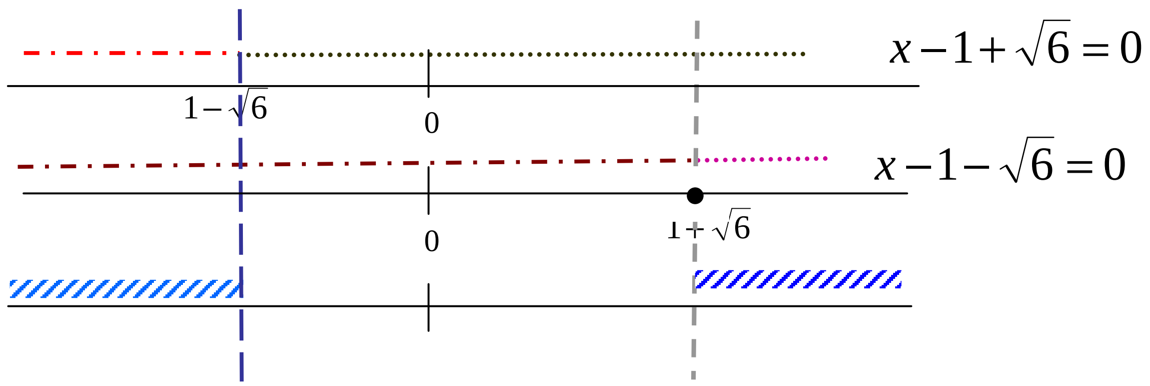
$$x = \frac{-2+2\sqrt{+}}{2} \qquad ,o, \qquad x_2 = \frac{-2-2\sqrt{6}}{2}$$

$$x_1 = -1+\sqrt{6} \qquad\qquad x_2 = -1-\sqrt{6}$$

$$\left[x-1+\sqrt{6}\right]\left[x-1-\sqrt{6}\right] \geq 0$$

$$x-1+\sqrt{6}=0 \quad ,o, \quad x-1-\sqrt{6}=0$$

$$x = 1-\sqrt{6} \qquad ,o, \qquad x = 1+\sqrt{6} <$$



0

$$s = \left(-\propto, 1-\sqrt{6}\right) \cup \left(1+\sqrt{6}, \propto\right)$$